

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
‘TEHNOMATH’
EDIȚIA II, 19 MAI 2018
CLASA A IX– A
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I (7 puncte)

1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 1$ și $b_2 = 3$.

2pct a) Să se calculeze b_4 .

2pct b) Arătați că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ are loc relația $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$.

3pct c) Determinați suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice.

Soluție:

a) $q = 3$ 1 punct

$b_4 = 27$ 1 punct

b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n \cdot q}{b_n}$ 1 punct

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$ 1 punct

c) $S = b_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$ 1 punct

$S = \frac{3^{10} - 1}{2}$ 1 punct

Subiectul II (7 puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- | | |
|-------|---|
| 2 pct | a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(3; 2b)$ și $B(-1; 4)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f . |
| 2 pct | b) Pentru $a=2$ și $b=6$, reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate xOy . |
| 2pct | c) Pentru $a=2$ și $b=6$ calculați suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(60)$. |
| 1pct | d) Rezolvați inecuația $8 - 2x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ |

Soluție:

a) $A(3; 2b) \in Gf \Leftrightarrow f(3) = 2b \Rightarrow 3a - b = 0$

$B(-1; 4) \in Gf \Leftrightarrow f(-1) = 4 \Rightarrow -a + b = 4$ 1 punct

$a=2; b=6$ 1 punct

- b) Pentru reprezentarea a doua puncte ce aparțin graficului1 punct
Pentru trasarea graficului1 punct

c) $S = (2 \cdot 1 + 6) + (2 \cdot 2 + 6) + \dots + (2 \cdot 60 + 6)$ 1 punct
 $S = 4020$ 1 punct

d) $x \leq 4; x \in (-\infty, 4]$ 1 punct

Subiectul III (7 puncte)

2 pct 1. Calculați aria $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$ și $BC = 8\text{cm}$.

Soluție:

$\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, $BC = 8\text{cm} \Rightarrow AC = 4\text{cm}$ 1 punct

$$A_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}cm^2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

2 pct 2. Demonstrați că în orice $\triangle ABC$ dreptunghic de arie S și ipotenuză a este adevărată identitatea $a^2 \sin B \sin C = 2S$.

Soluție:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$m(\sphericalangle A) = 90^\circ; S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \cdot 1}; a^2 \sin B \sin C = 2S \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

2 pct 3. Determinați $\sin x$, știind că $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ și $\cos x = \frac{2}{3}$.

Soluție:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \sin^2 x = \frac{5}{9} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x \in (0^\circ; 90^\circ); \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

1 pct 4. Să se arate că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

Soluție:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
 ‘TEHNOMATH’
 EDIȚIA II, 19 MAI 2018
 CLASA A X– A
 BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I (7 puncte)

- | | |
|-------|---|
| 1 pct | 1. Să se arate că |
| 1 pct | a) $\log_3 24 = 1 + 3a$, unde $a = \log_3 2$ |
| | b) $\log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 7$ |

Soluție:

- a) $\log_3 24 = \log_3 3 + \log_3 2^3$; $\log_3 24 = \log_3 24$ 1 punct
- b) $\log_2 14 \cdot 3 : 6 = \log_2 7$ 1 punct

- | | |
|------|---|
| 1pct | 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: |
| 2pct | a) $\frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$ |
| 2pct | b) $\sqrt{x-1} = x-1$ |
| | c) $\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x - 4 = 0$ |

Soluție:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $x = -1$ 1 punct
- b) Condiții $x \in \mathbb{R}; x-1 \geq 0, x-1 = x^2 - 2x + 1$ 1 punct
- $x \in \{1, 2\}$ 1 punct

- c) Notăm $\log_2 x = t$; $x > 0$; și ecuația devine $t^2 - 3t - 4 = 0$ 1 punct
 $\Rightarrow t_1 = 4; t_2 = -1 < 0 \Rightarrow x = 2^4; x = 2^{-1}$ 1 punct

Subiectul II (7 puncte)

- 1 pct | 1) Calculați $C_5^3 + A_5^3 + P_5$.

Soluție:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2!} + 5! = 190 \text{1 punct}$$

- 2 pct | 2) Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$.

Soluție:

$$n(n+1) = 72 \text{1 punct}$$

$$n \in \mathbb{N}; n = 8 \text{1 punct}$$

- 2 pct | 3) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Soluție:

$$\Delta = -4 < 0 \text{1 punct}$$

$$x_1 = 2 - i; x_2 = 2 + i \text{1 punct}$$

- 2 pct | 4) Fie numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = -2 + 3i$. Determinați z_3 știind
 că $z_1 = z_2 + z_3 - \frac{1}{2}z_1$.

Soluție:

$$\text{Fie } z_3 = a + bi; 1 + 2i = -2 + 3i + a + bi - \frac{1}{2}(1 + 2i) \text{1 punct}$$

$$a = \frac{7}{2}; b = 0 \Rightarrow z_3 = \frac{7}{2} \text{1 punct}$$

Subiectul III (7 puncte)

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1;-1), B(0;1), C(1;1)$ și $D(2;3)$.

- | | | |
|-------|--|--|
| 3pct | | a) Să se arate că dreptele AB și CD sunt paralele. |
| 2pct | | b) Să se calculeze distanța dintre punctele A și B . |
| 2 pct | | c) Dacă M este punctul de intersecție al dreptelor AD și BC să se determine distanța de la punctul M la dreapta AB . |

Soluție:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2; \dots\dots\dots 1p$$

$$m_{CD} = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$BC: y=1; \Rightarrow A, D \notin BC \Rightarrow AB, CD \text{ distincte}; m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow AB \parallel CD \dots\dots\dots 1p$$

$$b) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (1+1)^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$AB = \sqrt{5} \dots\dots\dots 1p.$$

$$c) AD: 4x - 3y + 1 = 0; BC: y = 1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 1\right) \dots\dots\dots 1p$$

$$AB: 2x - y + 1 = 0; d(M; AB) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 1p$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

“TEHNOMATH”

EDIȚIA a II-a, 19 MAI 2018

CLASA A XI- A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 4y - z = b \\ x + ay + 3z = -5, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ și matricea asociată } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

2 pct a) Să se calculeze $\det A$.

3 pct b) Pentru $a = 1$ și $b = 5$ să se rezolve sistemul.

2 pct c) Să se determine numărul real b , dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului și $-x_0 + y_0 + 2z_0 = -5$.

Soluție

a) $\det A = -2a + 12 - 1 + a - 3 + 8 \dots\dots\dots 1p$

$\det A = -a + 16 \dots\dots\dots 1p$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = 15 \neq 0$; $\Delta = 15$ rezultă sistem de tip Cramer..... 1p

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -30 \dots\dots\dots 1p$

$S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}; \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -2 \right) \right\} \dots\dots\dots 1p$

c) $x_0 + y_0 - 2z_0 = 5$
 $-x_0 + y_0 + 2z_0 = -5$

$y_0 = 0 \dots\dots\dots 1p$

Rezultă $x_0 = 1$; $z_0 = -2$; deci se obține $b = 3$1p

Subiectul II

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în $x_0 = -1$ astfel încât $g(-1) = g'(-1) = -2018$.

- | | |
|-------|--|
| 2 pct | a) Dacă $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$, să se calculeze $h'(-1)$. |
| 2 pct | b) Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2018} - 2019$, calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$. |
| 3 pct | c) Dacă $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x) - x^2}{x^2 + 2}$, calculați $h'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. |

Soluție

a) $f'(x) = e^x + 2x$; $f'(-1) = e^{-1} - 2$; $f(-1) = e^{-1} + 1$1p

$$h'(-1) = f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1);$$

$$h'(-1) = -2018(2e^{-1} - 1) \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) $g'(x) = 2018x^{2017}$ 1p

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 2018 \quad \dots\dots\dots 1p$$

c) $h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$;.....1p

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2 + 2} \right)' = \frac{(e^x)'(x^2 + 2) - e^x \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$h'(x) = \frac{e^x(x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul III

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$ unde a este un parametru real.

- 3pct | a) Să se determine valoarea reală a lui a , astfel încât funcția f să fie
2 pct | continuă în punctul $x_0 = 4$.
2 pct | b) Să se calculeze $f'(9)$.
c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

Soluție:

a) f este continuă în punctul $x_0 = 4$ rezultă că:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = 4a - 6 = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = f(4) \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = 4a - 6; \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = \sqrt{4} = 2; f(4) = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$4a - 6 = 2 \Leftrightarrow a = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; x > 4 \dots\dots\dots 1p$$

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) y - f(9) = f'(9)(x - 9); y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9) \dots\dots\dots 1p$$

$$x - 6y + 9 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

“TEHNOMATH”

EDIȚIA a II-a, 19 MAI 2018

CLASA A XII- A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I

Fie polinomul $f = X^3 - 4X + 3$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile X_1, X_2, X_3 .

2 pct a) Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3 pct b) Să se determine numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - a$ să fie 3.

2 pct c) Să se arate că $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_1 \\ X_3 & X_1 & X_2 \end{vmatrix}$ este număr întreg.

Soluție:

a) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \dots\dots\dots 1p$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + 5 = \frac{39}{8} \dots\dots\dots 1p$

b) $f(a) = 3 \Leftrightarrow a^3 - 4a + 3 = 3 \dots\dots\dots 1p$

$\Leftrightarrow a^3 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 4) = 0 \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow a \in \{-2; 0; 2\} \dots\dots\dots 1p$

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul II

Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20$.

- 2 pct | a) Să se arate că legea de compoziție $\circ$ este asociativă.
3 pct | b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x = x$.
2 pct | c) Să se calculeze $(-1) \circ 2 \circ (-3) \circ 4 \circ (-5) \circ 6 \circ (-7) \circ \dots \circ 2018$.

Soluție:

a) $x \circ y = (x+5)(y+5) - 5 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = (x+5)(y+5)(z+5) - 5 \dots\dots\dots 1p$

$x \circ (y \circ z) = (x+5)(y+5)(z+5) - 5 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

b) $x \circ x \circ x = x \Leftrightarrow (x+5)^3 - 5 = x \dots\dots\dots 1p$

$(x+5)^3 = x+5$; notăm $x+5 = a \Rightarrow a^3 = a \Rightarrow a \in \{-1; 0; 1\}$

$\dots\dots\dots 1p$

rezultă că $x \in \{-6; -5; -4\} \dots\dots\dots 1p$

c) $a \circ (-5) = (-5) \circ b = -5, \forall a, b \in \mathbb{R}$, legea este asociativă obținem $\dots\dots\dots 1p$

$(-1) \circ 2 \circ (-3) \circ 4 \circ (-5) \circ 6 \circ (-7) \circ \dots \circ 2018 = a \circ (-5) \circ b = -5 \circ b = -5 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul III

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

2pct | a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

3 pct | b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

2pct | c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției, atunci numerele

| $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 0$ rezultă că f este continuă în 01p

f continuă pe intervalele $(-\infty; 0); (0; \infty)$

rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$ 1p

$$\text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 \dots\dots\dots 1p$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{c) } \int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx \Leftrightarrow F(b) - F(a) = F(c) - F(b) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow F(b) = \frac{F(a) + F(c)}{2} \Rightarrow F(a), F(b), F(c) \text{ sunt termeni consecutivi ai unei}$$

progresii aritmetice.....1p