Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila
Liceul Tehnologic "Edmond Nicolau" Brăila

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ ''TEHNOMATH''
EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019
SUBIECTE, CLASA A IX– A

SUBIECTUL I

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, in care $a_2 = 3$ si $a_4 = 7$.

3p a) Să se afle suma primilor zece termeni ai progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$

2p b) Dacă $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ să se arate că $S_n = n^2, \forall n \in N, n \geq 1$.

2p c) Să se rezolve ecuația $x + 3x + 5x + \ldots\ldots\ldots\ldots + 99x = 5000$.

SUBIECTUL II

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$.

2p a)Dacă$A(a, a)$ aparține graficului funcției f să se afle numărul real a.

1p b)Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x) - 1 \geq 8x$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

1p a) Calculați $f(3)$

2p b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$

1p c) Dacă x_1, x_2 sunt soluţiile reale ale ecuaţiei$f(x) = 0$ arătați că $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$.

SUBIECTUL III

3p 1) Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

2p 2) Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură 60°şi ipotenuza de lungime 8.

2p 3) Ştiind că $\sin 80° - \cos 80° = a$, să se calculeze $\sin 100° + \cos 100° - a$.

***Notă*: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de două ore. Rezultatele vor fi afişate la avizierul Liceului Tehnologic "Edmond Nicolau", pe site-ul http://www.edmondnicolaubr.ro şi pe site-ul Isjbraila.ro, secţiunea Discipline/domenii, Matematică, Olimpiade şi concursuri**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ ''TEHNOMATH''
EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019
CLASA A IX– A

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$,in care $a_2 = 3$ si $a_4 = 7$.

3p a) Să se afle suma primilor zece termeni ai progresiei$(a_n)_{n\geq 1}$.

2p b) Dacă $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ să se arate că $S_n = n^2, \forall n \in N, n \geq 1$.

2p c) Să se rezolve ecuația $x + 3x + 5x + \ldots\ldots\ldots\ldots + 99x = 5000$.

Soluție:

a) $a_3 = \frac{a_2+a_4}{2} = 5, r = a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$ 1p

$a_1 = a_2 - r = 3 - 2 = 1$, $a_{10} = 19$, ...1p

$S_{10} = \frac{(1+19)\cdot 10}{2} = 100$ 1p

b) $a_n = 1 + (n-1)\cdot r = 2n - 1$, $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2n-1)$....................1p

$S_n = \frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2} = n^2$ 1p

c) $x(1 + 3 + 5 + \ldots + 99) = 5000$ 1p

$x \cdot 50^2 = 5000$, $x = 2$ 1p

SUBIECTUL II

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 6$.

2p a) Dacă$A(a, a)$ aparține graficului funcției f să se afle numărul real a.

1p b) Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x) - 1 \geq 8x$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

1p a) Calculați $f(3)$

2p b) Rezolvaţi în$\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$

1p c) Dacăx_1, x_2 sunt soluţiile reale ale ecuaţiei$f(x) = 0$ arătați că $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$.

Soluție:

1a) $A(a,a) \in G_f \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow 3a + 6 = a$ 1p

$2a = -6$, $a = -3$ 1p

1b) $(3x+6) - 1 \geq 8x$, $x \leq 1 \Rightarrow S = (-\infty, 1]$ 1p

2a) $f(3) = 18 - 15 - 3 = 0$ 1p

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$, $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$ 1p

$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 3$ 1p

c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$, $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1$ 1p

SUBIECTUL III

3p | 1) Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

2p | 2) Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură $60°$şi ipotenuza de lungime 8.

2p | 3)Ştiind că $\sin 80° - \cos 80° = a$, să se calculeze $\sin 100° + \cos 100° - a$.

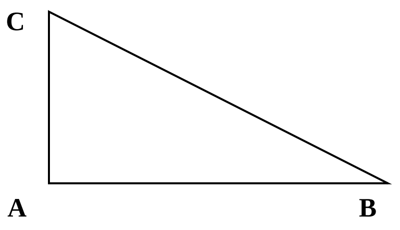
Soluție:

1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ 1p

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ 1p

$\Rightarrow BC \parallel AD$ si $BC = AD \Rightarrow ABCD$ este paralelogram 1p

2)



$m(\hat{C}) = 60°, \cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{8} \Rightarrow AC = 4$ 1p

$A_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \sin 60°}{2} = 8\sqrt{3}$ 1p

3) $\sin 80° = \sin 100°, -\cos 80° = \cos 100°$ 1p

$\sin 100° + \cos 100° - a = a - a = 0$ 1p

EDIȚIA a III-a, 17-18 MAI 2019

CLASA A X– A

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră numărul complex $z = 1 - i$.

1 pct	a) Calculaţi $2 \cdot z + \overline{z}$.
1 pct	b) Arătaţi că $z^2 = -2i$.
3 pct	c) Calculaţi $i^0 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2019}$.
2 pct	d) Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $4x^2 - 12x + 13 = 0$.

Subiectul II (7 puncte)

	1. Demonstraţi că:
1pct	a) $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$.
1pct	b) $\lg 20 + \lg 50 = 3$.
	2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:
2pct	a) $\sqrt{2x+3} = x - 3$.
2pct	b) $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$.
1pct	c) $\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_2 (x^2 - 1) = 4$.

Subiectul III (7 puncte)

În reperul cartezian xOy se consider punctele $A(3,1); B(1,2); C(a,b)$.

2pct	a) Determinaţi numerele reale *a*, *b*, ştiind că punctul *B* este mijlocul segmentului *AC*.
2pct	b) Demonstraţi că dreapta *AB* şi dreapta $d_1 : 2x + 4y - 9 = 0$ sunt paralele .
3pct	c) Determinaţi numărul real *m* pentru care dreapta *AB* şi dreapta $d_2 : mx + y - 12 = 0$ sunt perpendiculare.

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de două ore. Rezultatele vor fi afişate la avizierul Liceului Tehnologic “Edmond Nicolau”, pe site-ul www.edmondnicolaubr.ro și pe site-ul isjbraila.ro la sectiunea Discipline/domenii, Matematică, Olimpiade şi concursuri.**

EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019

CLASA A X– A

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră numărul complex $z=1-i.$

1 pct	a) Calculaţi $2\cdot z+\overline{z}.$
1 pct	b) Arătaţi că $z^2=-2i.$
3 pct	c) Calculaţi $i^0+i+i^2+i^3+...+i^{2019}.$
2 pct	d) Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $4x^2-12x+13=0.$

Soluţie

a) $2\cdot z+\overline{z}=2(1-i)+(1+i)=3-i$..$1pct$

b) $z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$..$1pct$

c) $i^0+i+i^2+i^3=0$..$1pct$

$(i^0+i+i^2+i^3)+i^4(i^0+i+i^2+i^3)+...+i^{2016}(i^0+i+i^2+i^3)=0$................$2pct$

d) $4x^2-12x+13=0.$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=-64<0\\ x_1=\dfrac{3-2i}{2}\\ x_2=\dfrac{3+2i}{2}\end{array}\right\}..................................2pct$$

Subiectul II (7 puncte)

1. Demonstraţi că:

1pct a) $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+\left(\sqrt{3}\right)^2=0.$

1pct b) $\lg 20+\lg 50=3.$

Soluţie:

a) $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+\left(\sqrt{3}\right)^2=7-10+3=0$..1*pct*

b) $\lg 20+\lg 50=\lg 1000=\lg 10^3=3$..1*pct*

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

2pct a) $\sqrt{2x+3}=x-3.$

1pct b) $3^{x^2-3x}=3^{x-4}.$

2pct c) $\log_2\dfrac{x-1}{x+1}+\log_2(x^2-1)=4.$

a) *Condiţii*

$$\left.\begin{aligned}&2x+3\ge 0\Rightarrow x\ge -\frac{3}{2}\\&x-3\ge 0\Rightarrow x\ge 3\end{aligned}\right\}\Rightarrow x\ge 3;2x+3=x^2-6x+9$$ 1*pct*

$S=\{4+\sqrt{10}\}$ 1pct

b)

$$\left.\begin{aligned}&x^2-3x=x-4\\&S=\{2\}\end{aligned}\right\}$$ 1*pct*

c) *Condiţii*

$$\left.\begin{aligned}&x+1\ne 0\Rightarrow x\ne -1\\&\frac{x-1}{x+1}>0\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)\\&x^2-1>0\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)\end{aligned}\right\}\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$$ 1*pct*

$S=\{-3;5\}$……………………………………………………1pct

Subiectul III (7 puncte)

ÎnreperulcartezianxOy se considerăpunctele $A(3,1);B(1,2);C(a,b)$.

2pct a) Determinaţi numerele reale a, b, ştiind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

2pct b) Demonstraţi că dreapta AB şi dreapta $d_1: 2x+4y-9=0$ sunt paralele .

3pct c) Determinaţi numărul real m pentru care dreapta AB şi dreapta $d_2: mx+y-12=0$ sunt perpendiculare.

Soluţie :

a) $x_B=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow a=-1$……………………………………………1$pct$

$y_B=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow b=3$……………………………………………………1$pct$

b) $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$……………………………………………………1$pct$

$m_{AB}=-\frac{1}{2}; m_{d_1}=-\frac{1}{2}; m_{AB}=m_{d_1}\Rightarrow AB \parallel d_1$……………………………………1$pct$

c) $AB: x+2y-5=0$……………………………………………………1pct

$AB\perp d\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{d_2}=-1$……………………………………………………1$pct$

$m\in\{-2\}$……………………………………………………1pct

CONCURS INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ ”TEHNOMATH”

EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019

CLASA A XI– A

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră matricele $X(a)=\begin{pmatrix}1+2a & -2a\\ 3a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

2 pct a) Arătaţi că $X(-2)+X(2)=2I_2$.

3 pct b) Arătaţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$.

2 pct c) Determinaţi valorile lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

Subiectul II (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

2 pct a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

2 pct b) Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}, x\in(2,+\infty)$.

3 pct c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcţiei f.

Subiectul III (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^3+3x^2+a, x\le 1\\ x-\frac{1}{x}, x>1\end{cases}$.

2 pct a) Deteminaţi valoarea reală a lui a, astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

2 pct b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

3 pct c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3(f'(x)-1)}{f(x)}$

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de două ore. Rezultatele vor fi afişate la avizierul Liceului Tehnologic “Edmond Nicolau”, pe site-ul www.edmondnicolaubr.ro, și pe site-ul Isjbraila.ro la sectiunea Discipline/domenii, Matematică, Olimpiade şi concursuri.**

EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019

CLASA A XI– A

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră matricele $X(a)=\begin{pmatrix}1+2a & -2a\\ 3a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

2pct	d) Arătaţi că $X(-2)+X(2)=2I_2$.
3 pct	e) Arătaţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$.
2 pct	f) Determinaţi valorile lui a pentru care matricea *X(a)* este inversabilă.

Soluţie:

a)
$$\left.\begin{aligned}&X(-2)=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -6 & 7\end{pmatrix}\\ &X(2)=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}\\ &2I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1pct$$

$$X(-2)+X(2)=2I_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1pct$$

b)
$$\left.\begin{aligned}&X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+2a & -2a\\ 3a & 1-3a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+2b & -2b\\ 3b & 1-3b\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}1+2(a+b-ab) & -2(a+b-ab)\\ 3(a+b-ab) & 1-3(a+b-ab)\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots 2pct$$

$$X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1pct$$

c) Matricea $X(a)$ este inversabila $\Leftrightarrow \det X(a) \neq 0$................................$1pct$

$\left.\begin{array}{r} det\, X(a) = 1 - a \\ a \neq 1 \Rightarrow a \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \end{array}\right\}$...$1pct$

Subiectul II (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:(2,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

2pct a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$.

2 pct b) Arătaţi că $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}, x \in (2,+\infty)$.

3 pct c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcţiei f.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x-2} =$..$1pct$

$= \dfrac{3-1}{3-2} = 2$..$1pct$

b) $f'(x) = \dfrac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}$...$1pct$

$f'(x) = \dfrac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}, x \in (2,+\infty)$...$1pct$

c) $y - f(3) = f'(3)(x-3)$..$1pct$

$f(3) = 2;\ f'(3) = -1$...$1pct$

Deci ecuaţia tangentei este $y = -x+5$..$1pct$

Subiectul III (7 puncte)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + a, x \leq 1 \\ x - \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$.

2pct a) Deteminaţi valoarea reală a lui a, astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

2 pct b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

3pct c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3(f'(x)-1)}{f(x)}$

a) f continuă în $x_0 = 1 \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1) = f(1)$..$1pct$

$f(1) = l_s(1) = 5 + a; l_d(1) = 0 \Rightarrow a \in \{-5\}$..$1pct$

b) $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1$..1*pct*

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

Deci dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*. …1 *pct*

c) $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$..1*pct*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3\cdot(f'(x)-1)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3\cdot(1+\frac{1}{x^2}-1)}{x-\frac{1}{x}}=$..1*pct*

$=2$...1*pct*

Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila
Liceul Tehnologic "Edmond Nicolau" Brăila

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ ''TEHNOMATH''
EDIŢIA a-III-a, 17-18 MAI 2019
SUBIECTE, CLASA A XII– A

SUBIECTUL I

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție:

$$x * y = -xy + 2x + 2y - 2$$

2p a) Să se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuația $x * 4 = 10$.

2p b) Să se determine elementul neutru al legii $*$

3p c) Ştiind că "$*$" este asociativă, să se calculeze:

$\frac{2020}{1} * \frac{2020}{2} * \frac{2020}{3} * \ldots\ldots\ldots * \frac{2020}{2020}$.

SUBIECTUL II

Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
şi $g = X^2 - 2X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

2p a) Să se calculeze diferența $S - S'$unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

3p b) Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul g.

2p c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3$.

SUBIECTUL III

1. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$.

1p a) Să se determine $f'(x), x > 0$.
1p b) Să se calculeze $f'(1) - f'(e)$.
1p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care are panta egală cu 1.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + x, x > 0 \\ x^3 - 2x + 1, x \le 0 \end{cases}$ si $g : [-1,0] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$.

1p a) Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
2p b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
1p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g,axa Ox şi dreptele de ecuații x= -1 si x=0 .

***Notă*: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de două ore. Rezultatele vor fi afişate la avizierul Liceului Tehnologic "Edmond Nicolau", pe site-ul http://www.edmondnicolaubr.ro şi pe site-ul isjbraila.ro, secţiunea Discipline/domenii, Matematică, Olimpiade şi concursuri**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ ''TEHNOMATH''
EDIŢIA a III-a, 17-18 MAI 2019
CLASA A XII– A

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I
Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție:
$x * y = -xy + 2x + 2y - 2$

2p a) Să se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuația $x * 4 = 10$.

2p b) Să se determine elementul neutru al legii $*$.

3p c) Știind că "$*$" este asociativă, să se calculeze

$\frac{2020}{1} * \frac{2020}{2} * \frac{2020}{3} * \ldots\ldots\ldots * \frac{2020}{2020}$.

Soluție:

1a) $-4x + 2x + 8 - 2 = 10$ 1p

$-2x = 4, x = -2 \in \mathbb{R}$ 1p

1b) $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -ex + 2e + 2x - 2 = -xe + 2x + 2e - 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$........1p

$(-x + 2)(e - 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 1$ 1p

1c) $2 * x = x * 2 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$, ...1p

$\left(\frac{2020}{1} * \frac{2020}{2} * \ldots\ldots * \frac{2020}{1009}\right) * \frac{2020}{1010} * \left(\frac{2020}{1011} * \ldots * \frac{2020}{2020}\right) = x * 2 * y$ 1p

$=(x * 2) * y = 2 * y = 2$ 1p

SUBIECTUL II
Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
şi $g = X^2 - 2X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

2p a) Să se calculeze diferența $S - S'$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

3p b) Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul g.

2p c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3$.

Soluție:

1a) $S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -3$ 1p

$S' = y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \Rightarrow S - S' = -5$ 1p

1b) $f = gq + r, gradr < gradg \Rightarrow q = X + 5$ 1p

si $r = 12X - 4$ 2p

1c) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-3)^2 - 2 \cdot 3 = 3$ 1p

${x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + 3({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0$ rezulta ${x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 = -3$ 1p

SUBIECTUL III

1.Fie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\ln x$.

1p a) Să se determine $f'(x), x > 0$.
1p b) Să se calculeze $f'(1) - f'(e)$.
1p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care are panta egală cu 1.

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + x, x > 0 \\ x^3 - 2x + 1, x \le 0 \end{cases}$ si $g:[-1,0] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$.

1p a) Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
2p b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
1p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g,axa Ox şi dreptele de ecuații x= -1 si x=0 .

Soluție:

1a) $f'(x) = x'(\ln x) + x(\ln x)' = \ln x + 1, x > 0$ 1p

1b) $f'(1) = \ln 1 + 1 = 1$, $f'(e) = \ln e + 1 = 2 \Rightarrow f'(1) - f'(e) = -1$ 1p

1c) $f'(x) = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, f(1))$este punctul de tangență ⇒ ecuația tangentei la Gf în A este

y=x-1 ....1p

2a) $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x^3 - 2x + 1) = 1$, $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^x + x) = 1, f(0) = 1 \Rightarrow l_s = l_d = f(0) \Rightarrow f$continuă în 0, f continuă pe $(-\infty, 0), (0, \infty) \Rightarrow f$continuă pe $\mathbb{R}$ ⇒f admite primitive pe $\mathbb{R}$...1p

2b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 1)dx + \int_{0}^{1} (e^x + x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$ 1p

$= -\frac{1}{4} + 2 + e + \frac{1}{2} - 1 = \frac{4e+5}{4}$ 1p

2c) $Aria = \int_{-1}^{0} |g(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |x^2 + x - 1|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 - x + 1)\,dx = \frac{7}{6}$ ....
....1p